



3 ESO Matemàtiques

M. Á. Ingelmo
Y. Á. Zárate

Índex

Unitat 1. Nombres

6

REPASSA	8
MAPA CONCEPTUAL	9
1. Nombres enters	10
2. Nombres decimals	11
3. Aproximacions i errors	12
4. Nombres fraccionaris: concepte i representació	14
5. Nombres fraccionaris: operacions	16
6. Fraccions i decimals	18
7. Nombres reals	20
8. Interval·ls i semirectes	22
SABER-NE MÉS	24
SÍNTESI	25
EXERCICIS I PROBLEMES	26
PROVES DE COMPETÈNCIES BÀSIQUES DE L'ÀMBIT MATEMÀTIC	32
AVALUA'T	33
MATEMÀTIQUES RECREATIVES	33

Unitat 2. Notació científica

34

REPASSA	36
MAPA CONCEPTUAL	37
1. Potències	38
2. Notació científica	40
3. Radicals	42
4. Operacions amb radicals	44
SABER-NE MÉS	46
SÍNTESI	47
EXERCICIS I PROBLEMES	48
PROVES DE COMPETÈNCIES BÀSIQUES DE L'ÀMBIT MATEMÀTIC	54
AVALUA'T	55
MATEMÀTIQUES RECREATIVES	55

Unitat 3. Proporcionalitat

56

REPASSA	58
MAPA CONCEPTUAL	59
1. Proporcionalitat directa	60
2. Proporcionalitat inversa	60
3. Proporcionalitat composta	62
4. Percentatges	64
5. Problemes de mescles, mòbils i aixetes	66
SABER-NE MÉS	68
SÍNTESI	69
EXERCICIS I PROBLEMES	70
PROVES DE COMPETÈNCIES BÀSIQUES DE L'ÀMBIT MATEMÀTIC	76
AVALUA'T	77
MATEMÀTIQUES RECREATIVES	77

TIC Wiris. Bloc I: Aritmètica 78

Unitat 4. Llenguatge algebraic

82

REPASSA	84
MAPA CONCEPTUAL	85
1. Monomis. Operacions	86
2. Polinomis. Operacions	88
3. Teorema del residu. Arrels d'un polinomi	96
4. Factorització de polinomis	97
5. Fraccions algebraiques	99
SABER-NE MÉS	102
SÍNTESI	103
EXERCICIS I PROBLEMES	104
PROVES DE COMPETÈNCIES BÀSIQUES DE L'ÀMBIT MATEMÀTIC	109
AVALUA'T	110
MATEMÀTIQUES RECREATIVES	110

Unitat 5. Equacions i sistemes

112

REPASSA	114
MAPA CONCEPTUAL	115
1. Equacions de primer grau amb una incògnita	116
2. Equacions de segon grau amb una incògnita	118
3. Equacions polinòmiques de grau més gran que dos amb una incògnita	121
4. Resolució de problemes mitjançant equacions	122
5. Equacions lineals amb dues incògnites. Sistemes	124
6. Resolució de sistemes	126
7. Resolució de problemes mitjançant sistemes	132
SABER-NE MÉS	134
SÍNTESI	135
EXERCICIS I PROBLEMES	136
PROVES DE COMPETÈNCIES BÀSIQUES DE L'ÀMBIT MATEMÀTIC	142
AVALUA'T	143
MATEMÀTIQUES RECREATIVES	143

Unitat 6. Successions i progressions

144

REPASSA	146
MAPA CONCEPTUAL	147
1. Successions	148
2. Progressions aritmètiques	152
3. Progressions geomètriques	155
4. Interès compost	159
SABER-NE MÉS	160
SÍNTESI	161
EXERCICIS I PROBLEMES	162
PROVES DE COMPETÈNCIES BÀSIQUES DE L'ÀMBIT MATEMÀTIC	168
AVALUA'T	169
MATEMÀTIQUES RECREATIVES	169

TIC Wiris i Excel. Bloc II: Àlgebra 170

Unitat 7. Geometria plana 176

REPASSA	178
MAPA CONCEPTUAL	179
1. Elements de la geometria plana.....	180
2. Classificació dels polígons.....	182
3. Triangles: rectes i punts notables	184
4. Circumferència i cercle	186
5. Teorema de Pitàgores	188
6. Perímetres i àrees	190
SABER-NE MÉS	194
SÍNTESI	194
EXERCICIS I PROBLEMES	196
PROVES DE COMPETÈNCIES BÀSIQUES DE L'ÀMBIT MATEMÀTIC.....	203
AVALUA'T	205
MATEMÀTIQUES RECREATIVES.....	205

Unitat 8. Transformacions en el pla 206

REPASSA	208
MAPA CONCEPTUAL	209
1. Transformacions en el pla: moviments	210
2. Translacions.....	212
3. Girs	216
4. Simetries	217
5. Homotècia i semblança	220
6. Composició de transformacions.....	225
SABER-NE MÉS	228
SÍNTESI	229
EXERCICIS I PROBLEMES	230
PROVES DE COMPETÈNCIES BÀSIQUES DE L'ÀMBIT MATEMÀTIC.....	238
AVALUA'T	239
MATEMÀTIQUES RECREATIVES.....	240

Unitat 9. Geometria en l'espai 242

REPASSA	244
MAPA CONCEPTUAL	245
1. Poliedres	246
2. Prismes	250
3. Piràmides i troncs de piràmide	252
4. Àrees i volums de políedres	254
5. Cossos rodons i cossos de revolució	258
6. Àrees i volums de cossos rodons.....	260
7. Àrees i volums de cossos geomètrics compostos ...	263
8. La Terra; coordenades geogràfiques	264
SABER-NE MÉS	266
SÍNTESI	268
EXERCICIS I PROBLEMES	270
PROVES DE COMPETÈNCIES BÀSIQUES DE L'ÀMBIT MATEMÀTIC.....	278
AVALUA'T	279
MATEMÀTIQUES RECREATIVES.....	279

TIC GeoGebra. Bloc III: Geometria 280**Unitat 10. Funcions i gràfiques 286**

REPASSA	288
MAPA CONCEPTUAL	289
1. Funcions i gràfiques.....	290
2. Propietats d'una funció mitjançant l'estudi de la seva gràfica.....	292
3. Funcions de primer grau.....	298
4. Funció de proporcionalitat inversa.....	302
5. Funcions de segon grau o funció quadràtica. Representació i equació	304
SABER-NE MÉS	306
SÍNTESI	307
EXERCICIS I PROBLEMES	308
PROVES DE COMPETÈNCIES BÀSIQUES DE L'ÀMBIT MATEMÀTIC.....	318
AVALUA'T	319
MATEMÀTIQUES RECREATIVES.....	319
TIC GeoGebra. Bloc IV: Anàlisi	320

Unitat 11. Estadística 324

REPASSA	326
MAPA CONCEPTUAL	327
1. Conceptes estadístics	328
2. Recollida i organització de dades: taules de freqüències.....	330
3. Representació de dades: gràfics estadístics.....	332
4. Tractament de dades: paràmetres estadístics.....	334
5. Diagrama de caixa i bigotis	341
SABER-NE MÉS	342
SÍNTESI	344
EXERCICIS I PROBLEMES	345
PROVES DE COMPETÈNCIES BÀSIQUES DE L'ÀMBIT MATEMÀTIC.....	354
AVALUA'T	355
MATEMÀTIQUES RECREATIVES.....	355

Unitat 12. Probabilitat 356

REPASSA	358
MAPA CONCEPTUAL	359
1. Conceptes probabilístics	360
2. Tipus de successos i operacions	360
3. Probabilitat teòrica. Regla de Laplace.....	363
4. Probabilitat experimental: estadística i probabilitat.	366
SABER-NE MÉS	367
SÍNTESI	368
EXERCICIS I PROBLEMES	369
PROVES DE COMPETÈNCIES BÀSIQUES DE L'ÀMBIT MATEMÀTIC.....	375
AVALUA'T	376
MATEMÀTIQUES RECREATIVES.....	376
TIC Excel. Bloc V: Estadística i probabilitat	377

PROPORCIONALITAT



El repartiment de riqueses entre totes les persones que poblen el món és realment desequilibrat. La població mundial és de prop de 7 000 milions de persones, i el 80% de la riquesa es concentra en 1 000 milions de persones, mentre que hi ha 1 500 milions de persones més que malviuen amb l'1,5% de la riquesa total, menys d'1 euro per persona al dia.

Què creus que passaria amb la pobresa als països subdesenvolupats si tots els diners del món es repartissin equitativament? En base a quins criteris es podria repartir? Proporcionalment a les hores treballades? Per famílies, proporcionalment al nombre de membres de cada família? Hi ha milers de possibilitats, cada una de les quals amb avantatges i inconvenients, però el que és evident és que si no hi hagués aquestes diferències abismals en la distribució de la riquesa, no existiria la fam al món.

Al llarg d'aquesta unitat, aprendràs a treballar correctament i de forma senzilla amb els percentatges, i també, entre altres coses, sabràs fer repartiments atenent a diferents criteris. Utilitzant correctament aquests procediments apresos en el tema, comprovaràs com la riquesa del món es podria repartir entre tots, de manera que s'eliminarien les grans desigualtats socials avui dia.

INTERPRETA I RESOL

La riquesa financera (diners invertits) total al món s'estima en 35 bilions d'euros. Si aquests diners es repartissin entre tots els habitants del món, quants diners ens correspondrien a cada un?

Raó

La raó de dos nombres és el quocient entre dos nombres. Per exemple, la raó entre 3 i 4 és $\frac{3}{4} = 0,75$. Podem expressar la raó com a fracció o com a decimal.

Proporció

Quatre nombres formen proporció si la raó dels dos primers és igual a la raó dels dos últims. Per exemple, 1, 2, 4, 8 formen proporció perquè $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$, ja sigui observant que són fraccions equivalents, ja sigui observant que la raó és 0,5 en tots dos casos.

Existeix una definició equivalent a l'anterior proporció. Per fer-ho denotarem com a extrems el primer i l'últim nombre de la proporció (els nombres 1 i 8 en l'exemple anterior) i mitjans els nombres interiors (el 2 i el 4). D'aquesta manera, si quatre nombres formen proporció es verifica que el producte dels extrems és igual al producte dels mitjans. En l'exemple anterior tenim que $1 \cdot 8 = 2 \cdot 4$.

Constant de proporcionalitat

És el valor de qualsevol de les raons d'una proporció. En el cas anterior, la constant de proporcionalitat és 0,5.

EXERCICIS

1. Determina la raó de les següents parelles de nombres. Expressa-la en forma decimal si el resultat és exacte.

a) 87 i 25

b) 65 i 13

c) 52 i 4

d) 3 i 9

2. Decideix si els següents nombres formen o no proporció. Calcula la constant de proporcionalitat en els casos possibles.

a) 1, 2, 3, 4

b) 5, 6, 10, 12

c) 2, 4, 3, 6

d) 3, 3, 3, 3

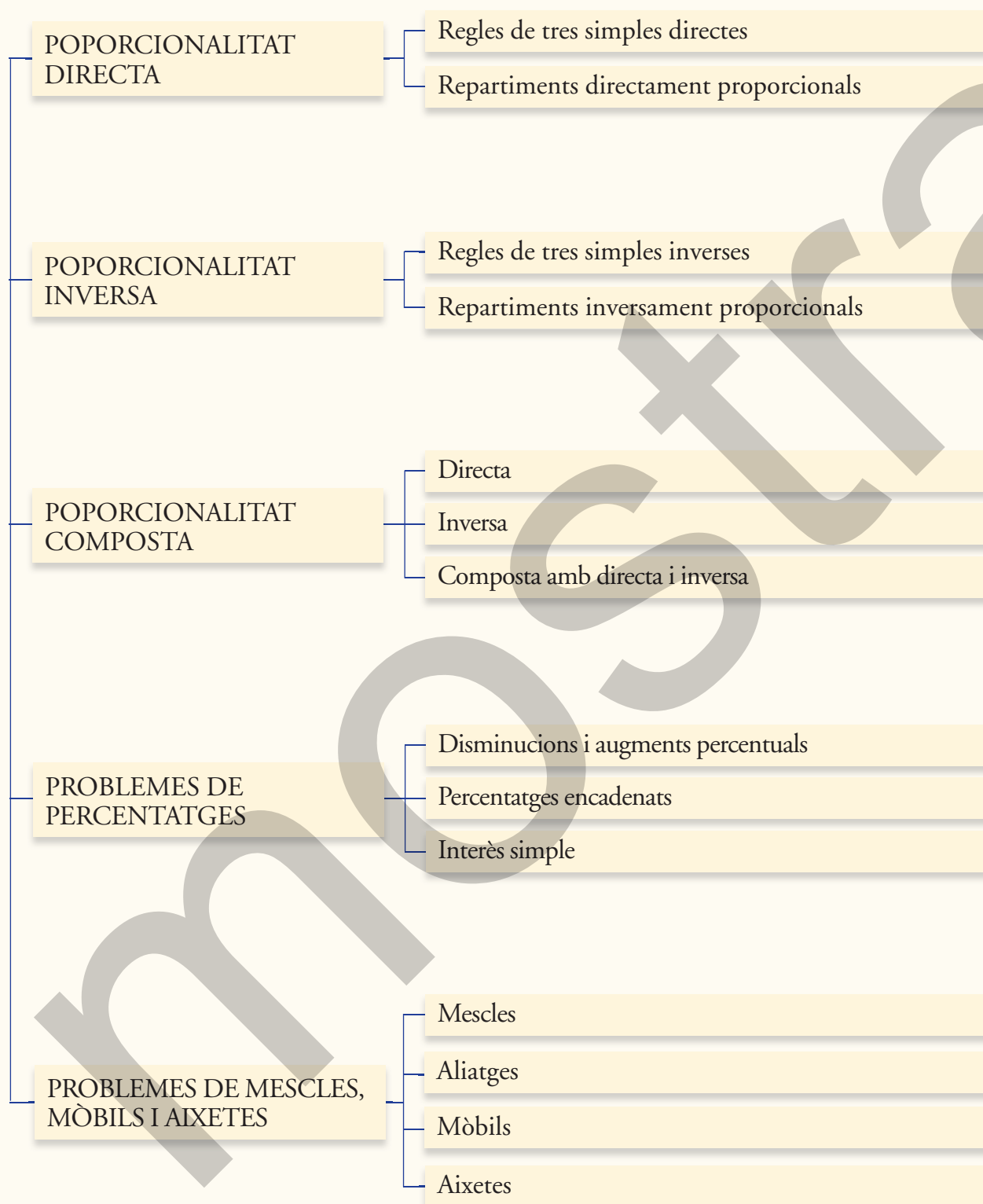
3. Calcula el terme o termes que falten a les següents proporcions:

a) $\frac{x}{81} = \frac{65}{27}$

b) $\frac{x}{3} = \frac{12}{x}$

c) $\frac{2}{x} = \frac{5}{6}$

d) 3, 5, x, 8



1. Proporcionalitat directa

Dues magnituds són **directament proporcionals** si la raó entre cada parella de valors es manté constant. Aquesta raó s'anomena **constant de proporcionalitat directa**.

Les magnituds X i Y són directament proporcionals:

X	2	5	6	9
Y	6	15	18	27

$$\frac{6}{2} = \frac{15}{5} = \frac{18}{6} = \frac{27}{9} = 3$$

La constant de proporcionalitat és 3.

1.1. Regles de tres simples directes

EXERCICIS RESOLTS

1. En una fruiteria ens venen pomes a 2,15 €/kg.

Quant ens costarien 350 grams de pomes?

Plantegem una regla de tres:

Pomes (g)	1000	350
Preu (€)	2,15	x

Totes dues magnituds són directament proporcionals, perquè totes dues augmenten o disminueixen en la mateixa proporció. Per tant, la raó de les seves quantitats és constant.

$$\frac{1000}{2,15} = \frac{350}{x} \rightarrow 1000x = 350 \cdot 2,15 \rightarrow x = \frac{350 \cdot 2,15}{1000} = 0,75\text{€ costaran 350 grams de pomes.}$$

Solució

1.2. Repartiments directament proporcionals

EXERCICIS RESOLTS

1. Dos treballadors han realitzat una determinada obra per la qual se'ls volen abonar 1 250€. Un d'ells ha treballat 40 hores, mentre que l'altre només hi ha estat 25 hores. Quant ha de cobrar cada un?

Ara calcularem el que correspon a 1 hora de feina.

En total s'ha treballat $40 + 25 = 65$ hores, per la qual cosa 1 hora de feina està pagada a $1\,250 : 65 = 19,23\text{€}$.

Per tant, l'obrer que ha treballat 40 hores haurà de cobrar $19,23 \cdot 40 = 769,25\text{€}$ i l'altre $19,23 \cdot 25 = 480,75\text{€}$.

Solució

2. Proporcionalitat inversa

Dues magnituds són **inversament proporcionals** si el producte de cada parella de valors es manté constant. Aquest producte de cada parella de valors s'anomena **constant de proporcionalitat inversa**.

Les magnituds de X i Y són inversament proporcionals:

X	2	5	6	9
Y	90	36	30	20

$$2 \cdot 90 = 5 \cdot 36 = 6 \cdot 30 = 9 \cdot 20 = 180$$

La constant de proporcionalitat és 180.

2.1. Regles de tres simples inverses

EXERCICIS RESOLTS

1. Hem decidit pintar les parets de casa nostra. La paret del saló l'hem pintat entre 2 persones en 3 hores, i ara volem pintar la paret de l'habitació (que és igual de gran), però entre 3 persones. Quant trigarem?

Plantegem una regla de tres:

Nre. de persones	2	3
Temps (h)	3	x

Totes dues magnituds són inversament proporcionals, perquè si una augmenta l'altra disminueix en la mateixa proporció. Per tant, el producte de les seves quantitats és constant.

$2 \cdot 3 = 3 \cdot x$, és a dir, $x = 2$ h trigarem a pintar-la.

Solució

2.2. Repartiments inversament proporcionals

EXERCICIS RESOLTS

1. En una cursa d'una competició determinada es reparteixen punts als tres primers a arribar de forma inversament proporcional als seus temps. En aquesta ocasió es posen en joc 94 punts. Si el primer classificat ha trigat 3 min a finalitzar el recorregut, el segon 4 min i el tercer 5 min, quants punts ha de tenir cada un?

Repartir 94 punts en parts inversament proporcionals a 3, 4 i 5 és equivalent a repartir 94 punts en parts directament proporcionals a $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{5}$.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{20 + 15 + 12}{60} = \frac{47}{60} \rightarrow \frac{94}{\frac{47}{60}} = 120$$

Al primer classificat li corresponen $\frac{1}{3} \cdot 120 = 40$ punts, al segon, $\frac{1}{4} \cdot 120 = 30$ punts i al tercer, $\frac{1}{5} \cdot 120 = 24$ punts.

Solució

EXERCICIS

- Detecta a les següents parelles de magnituds si existeix o no proporcionalitat directa o inversa. En aquest cas, indica la constant de proporcionalitat.
 - | | | | | |
|---|----|---------------|----------------|---|
| X | 2 | 8 | 7 | 5 |
| Y | 10 | $\frac{5}{2}$ | $\frac{20}{7}$ | 4 |
 - | | | | | |
|---|----|----|----|-----|
| X | 24 | 30 | 12 | 15 |
| Y | 12 | 15 | 6 | 7,5 |
 - | | | | | |
|---|---|---|---|----|
| X | 6 | 5 | 8 | 10 |
| Y | 5 | 6 | 4 | 3 |
- Tenim una garrafa amb la qual omplim 5 ampolles de 2 litres. Si els ampolles que tenim són de tres quarts de litre, quantes n'ompliríem del tot? Quina quantitat quedaria a l'ampolla sense omplir?
- Amb 8 garrafes d'aigua abastem un habitatge durant 30 dies. Si comprem 10 garrafes, per a quants dies tindran aigua?
- Volem repartir 1 punt de la nota de l'avaluació entre els tres membres d'un grup, segons el nombre d'exercicis que ha fet cada un. Si la Laura ha fet 3 exercicis, en Robert n'ha fet 5 i l'Andreu n'ha aconseguit resoldre 2, quina puntuació haurà de rebre cada alumne?
- Calcula la quantitat total que s'ha repartit en parts proporcionals a 2, 3 i 4 si a la primera part li han correspost 100 €. Calcula també el que ha de correspondre a cada un.
- Es volen repartir 50 euros en parts inversament proporcionals a 15, 30 i 50. Indica quant correspon a cada un. Arrodoneix els resultats a les centèsimes.

3. Proporcionalitat composta

A vegades relacionem més de dues magnituds en un problema i obtenim regles de tres compostes. En aquests problemes hem d'estudiar el tipus de proporcionalitat (directa o inversa) que s'estableix entre les diferents magnituds, ja que s'ha de tenir en compte a l'hora de resoldre l'exercici.

3.1. Proporcionalitat composta directa

EXERCICIS RESOLTS

1. En unes vacances, una agència de viatges ens cobra a un grup de 4 persones 1 500€ per tres dies d'estada en una casa rural. Si volem anar 6 persones, 5 dies a aquesta casa rural, quants diners ens cobrarà?

Nre. de persones	Dies	Preu
4	3	1 500
6	5	x

Les parelles de magnituds Nre. de persones – Preu i Dies – Preu són totes dues directament proporcionals; per tant, podem resoldre el problema de la manera següent:

$$\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1500}{x} \rightarrow \frac{12}{30} = \frac{1500}{x} \rightarrow x = 3\,750 \text{ € ens cobrarà.}$$

Solució

En la proporcionalitat composta, les raons enterament numèriques es col·loquen en un membre de l'equació multiplicant-se, mentre que a l'altre es col·loca la raó que conté a la incògnita.

Si la proporcionalitat composta és directa, totes les raons tenen la mateixa disposició a la taula.

3.2. Proporcionalitat composta inversa

EXERCICIS RESOLTS

1. Per realitzar un quadre per a una exposició, un artista ha treballat 8 hores diàries durant 10 dies. Si decideix col·laborar amb un altre artista i treballar durant 5 hores diàries, quants dies necessitarà per acabar un quadre similar a l'anterior?

Nre. de persones	Hores diàries	Dies
1	8	10
2	5	x

Les parelles de magnituds Nre. de persones – Dies i Hores diàries – Dies són totes dues inversament proporcionals; per tant, podem resoldre el problema de la manera següent:

$$\begin{array}{c} \uparrow \downarrow \\ \frac{2}{1} \cdot \frac{5}{8} = \frac{10}{x} \rightarrow \frac{10}{8} = \frac{10}{x} \rightarrow x = 8 \text{ dies trigarà.} \end{array}$$

Solució

Als problemes de proporcionalitat composta inversa les raons enterament numèriques tenen una disposició contrària a la de la raó que conté la incògnita.

3.3. Proporcionalitat composta amb directa i inversa

EXERCICIS RESOLTS

1. En una granja 25 vaques mengen 1 500 kg de pinso en 30 dies. Si es decideix comprar 10 vaques més i afegir 250 kg de pinso, quants dies els durarà aquesta nova quantitat?

Nre. de vaques	Pinso (kg)	Dies
25	1 500	30
35	1 750	x

La parella de magnituds Nre. de vaques – Dies és inversament proporcional i la parella Kg de pinso – Dies és directament proporcional. Per això, procedirem de la manera següent:

$$\begin{array}{c} \uparrow \downarrow \\ \frac{35}{25} \cdot \frac{1500}{1750} = \frac{30}{x} \rightarrow \frac{52\,500}{43\,750} = \frac{30}{x} \rightarrow x = 25 \text{ dies trigarà el pinso a esgotar-se.} \end{array}$$

Solució

EXERCICIS

7. ●●○ En cada una de les 150 pàgines d'un llibre, hi ha 30 línies mecanografiades amb una mitjana de 10 paraules per línia. Si volem editar el mateix llibre utilitzant un format d'unes 8 paraules per línia, però de 25 línies per pàgina, de quantes pàgines constarà el llibre?
8. ●●○ En 7 dies, 8 obrers han arreglat 28 km de carretera. Quants obrers seran necessaris per arreglar en 6 dies 30 km de carretera?
9. ●●○ Dos camions treballant 10 hores diàries consumeixen 300 L de gasolina cada dia. Si l'empresa disposa ara de 3 camions i decideix posar-los a circular 9 hores diàries, quants litres de gasolina haurà de pagar?
10. ●●○ Un alberg disposa de menjar per alimentar 30 persones durant 10 dies. Si es presenten 20 persones que mengen el doble de la ració prevista, per a quants dies hi haurà menjar?



4. Percentatges

EXERCICIS RESOLTS

1. Sabem que el 40% dels alumnes de 3r A són fills únics. Esbrina quants són, sabent que en aquell grup són 30.

Nre. d'alumnes sense germans	40	x
Nre. d'alumnes totals	100	30

$$\frac{40}{100} = \frac{x}{30} \rightarrow x = 12 \text{ alumnos no tienen hermanos.}$$

Solució

4.1. Problemes de disminucions i augments percentuals

EXERCICIS RESOLTS

1. En unes rebaixes s'observen els tiquets que veus a continuació, en què falten algunes dades. Ajuda el dependent a completar-los.



Preu abans	325	100
Preu després	x	85

$$x = \frac{85 \cdot 325}{100} = 276,25 \text{€ costarà després de la rebaixa.}$$

Preu abans	x	100
Preu després	162,50	65

$$x = \frac{100 \cdot 162,50}{65} = 250 \text{ € costarà abans de la rebaixa.}$$

Solució

4.2. Problemes de percentatges encadenats

EXERCICIS RESOLTS

1. A causa d'un conflicte internacional el preu del gasoil està pujant. Al gener s'ha encarit un 3% i al febrer ha tornat a pujar un 2%.
- a) Quin és el percentatge de pujada total des de gener?
- b) Si el gasoil estava a 1,2 €/L al gener, quant costa després de les dues pujades?

a) Augment del 3% $\leftrightarrow$ 1,03. Augment del 2% $\leftrightarrow$ 1,02. Percentatge de pujada total: $1,03 \cdot 1,02 = 1,0506 \leftrightarrow$ augment del 5,06%.

b) $1,2 \cdot 1,0506 = 1,26 \text{ € costarà ara.}$

Solució

4.3. Problemes d'interès simple

Quan dipositem diners al banc, ens dona un benefici, una determinada quantitat que és proporcional al que hem ingressat i al temps que els hem mantingut al compte. Aquest benefici rep el nom d'**interès simple**, i es denota amb I . Els diners que es dipositen són el capital, C , que s'hi deixa durant un temps, t , a un percentatge o rèdit, r .

Temps en anys	Temps en mesos	Temps en dies
$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$	$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200}$	$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36000}$

OBSERVA

Quan el temps es mesura en dies, es divideix entre 36 000, ja que, per simplicitat, es considera un any de 12 mesos amb 30 dies cada un. No obstant això, es pot trobar també la mateixa fórmula amb 36 500 al denominador quan es considera la durada real d'un any com de 365 dies.

EXERCICIS RESOLTS

1. Hem dipositat 30 000 € al banc, a un 4 % anual durant 2 anys.

- Calcula els interessos obtinguts quan s'acaben els 2 anys.
- Calcula els interessos si retirem el capital als 18 mesos.

$$a) I = \frac{30\,000 \cdot 4 \cdot 2}{100} = 2400 \text{ € d'interessos.}$$

$$b) I = \frac{30\,000 \cdot 4 \cdot 18}{1200} = 1800 \text{ € d'interessos.}$$

Solució

EXERCICIS

11. ●●● Calcula el que s'indica en cada cas.

- El 28 % de 140.
- El percentatge que representa 6,66 de 222.
- La quantitat total, si sabem que 448 són el 56 %.
- El 235 % de 42.

12. ●●● Un embassament està al 32 % de la seva capacitat.

- Si ple pot contenir 300 hm³ d'aigua, quants litres té ara l'embassament?
- Si una persona es beu uns 3 L d'aigua al dia, podria arribar a beure's l'aigua embassada al llarg de la seva vida?

13. ●●● Es diu que l'atur ha baixat en l'últim trimestre de l'any un 2,25 %. Si al tercer trimestre hi havia 4 500 000 aturats, quants n'hi ha ara?

14. ●●● C2 Un cotxe costa 14 160 €, IVA inclòs. Si l'IVA és d'un 21 %, quant valia abans de afegir-hi l'impost?

15. ●●● Els segells incrementen el seu valor d'any a any. Si aquest any un segell val 39 cèntims, i el percentatge de variació d'un any a l'altre és del 2 %:

- Quant valdrà l'any següent?
- Quant valia l'any anterior?

Arrodoneix els resultats a la xifra que consideris adequada.

16. ●●● C2 Si els preus s'encareixen un 3 % i a continuació baixen un 3 %, globalment han pujat o han baixat des del moment inicial? Quin és el percentatge global de variació?

17. ●●● C2 El 2013 els preus van pujar un 3,7 %. Si el conjunt dels anys 2013-2014 els preus han pujat un 7,848 %, podries determinar quant van pujar els preus el 2014?

18. ●●● C2 Calcula els interessos que generen 15 000 € dipositats en un banc, a un 3 %, si els hi deixem

- 5 anys.
- 24 mesos.

5. Problemes de mescles, mòbils i aixetes

5.1. Mescles

EXERCICIS RESOLTS

- Volem barrejar 30 litres d'oli d'oliva verge extra amb 50 litres d'un altre tipus d'oli d'oliva de menys qualitat. Calcula el preu de la mescla, si el litre de l'oli de més qualitat val 3,50 € i el de menys qualitat costa 2,50 € cada litre.

	Litres	€/L	€
Oli verge extra	30	3,5	$30 \cdot 3,5 = 105$
Oli de menys qualitat	50	2,5	$50 \cdot 2,5 = 125$
Mescla	$30 + 50 = 80$	x	$80x$

Per tant, $105 + 125 = 80x$, en què $x = 2,88$ €/L.

Solució

5.2. Aliatges

EXERCICIS RESOLTS

- Volem fondre 3 kg d'or de 70 % de llei amb 2 kg d'or de 85 % de llei. Obtén la llei del lingot resultant.

	Quilograms	Llei	kg or pur
Or del 70 %	3	0,7	$3 \cdot 0,7 = 2,1$
Or del 85 %	2	0,85	$2 \cdot 0,85 = 1,7$
Mescla	$3 + 2 = 5$	x	$5x$

Per tant $2,1 + 1,7 = 5x$, és a dir, $x = 0,76$. La mescla té un 76 % de llei.

Solució

COMPTE

La llei d'un metall preciós mesura la seva puresa en tant per cent. Els quirats també serveixen per graduar la puresa del metall, però tenen una escala d'un màxim de 24 quirats.

5.3. Mòbils

EXERCICIS RESOLTS

- Dos vehicles estan, l'un de l'altre, a una distància de 40 km. El primer va a 90 km/h i el segon, a 70 km/h. Calcula el temps que trigarán a trobar-se i la distància que haurà recorregut cada vehicle, si:
 - Van en sentits oposats.
 - Van en el mateix sentit, i el segon va a davant i el primer, darrere.

Si anomenem x el temps que triguen a trobar-se, el primer recorre $90x$ i el segon, $70x$.

$$a) 90x + 70x = 40 \rightarrow x = \frac{40}{160} = \frac{1}{4} \text{ h} = 15 \text{ min triguen a trobar-se.}$$

Han recorregut $90 \cdot \frac{1}{4} = 22,5$ km i $70 \cdot \frac{1}{4} = 17,5$ km, respectivament.

$$b) 90x - 70x = 40 \rightarrow x = \frac{40}{20} = 2 \text{ h triguen a trobar-se.}$$

Han recorregut $90 \cdot 2 = 180$ km i $70 \cdot 2 = 140$ km, respectivament.

Solució

5.4. Aixetes

EXERCICIS RESOLTS

1. Una aixeta omple un determinat recipient en 3 minuts, mentre que una altra necessita 4 minuts per omplir-lo. Si obrim les dues aixetes alhora, quant temps trigaran a omplir-lo?

La primera aixeta omple $\frac{1}{3}$ del recipient en 1 minut, i el segon omple $\frac{1}{4}$ en el mateix període de temps.

Si les dues aixetes estan obertes, ompliran $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ del recipient en 1 minut. Per tant, plantejant una regla de tres simple directa tenim:

Part de recipient	Minuts
$\frac{7}{12}$	1
1	x

$$x = \frac{1}{\frac{7}{12}} = \frac{12}{7} = 1,71 \text{ minuts, és a dir, 1 minut 42,6 segons trigaran a omplir-lo tots dos junts.}$$

Solució

EXERCICIS

19. ●●○ Per fer llimonada barregem 3 litres de suc de llimona amb 1 litre d'aigua. Si el suc de llimona està a 1,20 € el litre, quin preu té el litre de la barreja?
20. ●●● Determina quants quilograms de cafè es necessiten, si volem obtenir una mescla de cafè i xicoira a 2,40 €/kg, teniendo en cuenta que empleamos 3 kg de achicoria a 1,50 €/kg i un cafè que val 4 € cada quilogram.
21. ●●● C2, C5 Volem fondre un lingot de 4 quilograms d'or de 23 quirats amb un de 2 quilograms de 24 quirats. Quants quirats tindrà la mescla resultant? De quina llei es tracta?
22. ●●○ Un naufrag és arrossegat pel corrent d'un riu a una velocitat de 5 km/h. Un vaixell que està a 1 km d'ell, riu amunt, l'albira i es dirigeix a rescatar-lo a 25 km/h. Quant temps triga a arribar?
23. ●●○ La Isabel i la Núria surten alhora de les seves respectives cases i es dirigeixen l'una a casa de l'altra. La Isabel va a 5 km/h i la Núria a 4 km/h. Si surten a les 9:00, a quina hora es trobaran, sabent que les cases disten entre si 900 metres? Quina distància haurà recorregut cada una d'elles?
24. ●●○ Volem omplir una banyera fent servir l'aixeta i la dutxa. Si només fem servir l'aixeta s'omple en 4 minuts, i si fem servir només la dutxa necessitem 6 minuts. Quant temps trigarem a omplir-la si obrim les dues aixetes alhora? Trigarem menys de 2 minuts 30 segons?
25. ●●○ La Lola renta el seu cotxe en 15 minuts i l'Alfred el renta en 30 minuts. Si rentessin el cotxe junts un dels cotxes, quant temps trigarien?

Matemàtica financera

Quan estudiàvem l'interès simple, veiem problemes en què es dipositava una determinada quantitat de diners i després d'un termini retiràvem els interessos. Si en lloc de retirar-los afegim aquests interessos a la quantitat dipositada durant més temps, obtenim un problema d'interès compost.



En aquest cas, el capital final, C_f , que s'obté en invertir un capital inicial, C , durant un temps (en anys), t , a un rèdit, r , segueix la fórmula

$$C_f = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

EXERCICIS RESOLTS

1. Ingressem 15 000 € durant 5 anys amb un interès compost del 3 % anual. Quants diners obtindrem al final del termini? Quants interessos hem guanyat?

$$C_f = 15\,000 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^5 \rightarrow 17\,389,11 \text{ € obtindrem al final del termini, que impliquen } 2\,389,11 \text{ € d'interessos.}$$

Solució

EXERCICIS

26. ●●● C2 A quin rèdit hem col·locat 6 000 € durant 3 anys, si al final del període hem obtingut 6 945,75 €?
27. ●●● C2 Quan a l'interès simple el temps està en mesos o dies, es modifica la fórmula. Aquests mateixos canvis es tenen en la de l'interès compost. Amb aquesta informació, calcula el capital que recollim després de 24 mesos d'inversió si ingresem 5 000 € a l'1,5 %.
28. ●●● C2 Determina el capital que, amb un interès compost del 3,5 % anual, produeix 3 378 € d'interessos en 5 anys.

Magnituds directament proporcionals			Magnituds inversament proporcionals		
Les raons entre parelles són iguals.	Quan una augmenta, l'altra també ho fa en la mateixa proporció.	Resolen regles de tres simples directes.	Els productes de parelles són iguals.	Quan una augmenta, l'altra disminueix en la mateixa proporció.	Resolen regles de tres simples inverses.

Percentatges				
Càlcul	Equivalència entre fracció, decimal i percentatge.	Obtenció d'un percentatge coneguts la part i el tot.	Augments percentuals	Descomptes percentuals
$40\% \text{ de } 60 =$ $= \frac{40 \cdot 60}{100} = 24$	$\frac{2}{5} = 0,4 = 40\%$	5 de 8 equival a un $\frac{5}{8} = 0,625 = 62,5\%$	En incrementar un 10% a 80 obtenim $80 \cdot 1,1 = 88.$	En disminuir un 10% a 80 obtenim $80 \cdot 0,9 = 72.$

Problemes aritmètics					
Percentatges encadenats	Interès simple	Proporcionalitat composta	Mescles i aliatges	Mòbils	Aixetes
El que és més útil és treballar amb la forma decimal dels percentatges, i multiplicar-los de forma encadenada.	$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$ (si t és en anys) $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200}$ (si t és en mesos) $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36000}$ (si t és en dies)	Estudiem si les magnituds són directes o inverses, i col·loquem les fraccions segons el tipus de proporcionalitat.			Calculem quin treball fan juntes en 1 unitat de temps i després fem una regala de tres simple.

Exercicis inicials

29. ●●● C8 En el text del principi de la unitat, s'ha dit que el 80 % de les riqueses es concentraven en 1 000 milions de persones. Quants euros de mitjana tindrien aquestes persones tenint en compte la quantitat de riquesa financera de l'exercici de la portada?

Nota: La quantitat real és molt més gran, ja que el 20 % restant, encara que tingui riqueses, amb prou feines aporta riquesa financera, ja que no té cap possibilitat d'invertir.

30. ●●● C8 1500 milions de persones només tenen l'1,5 % de les riqueses. Considerant el valor total d'aquestes riqueses com la quantitat de riquesa financera de la portada, quina quantitat té cada una de les persones d'aquest sector?

Compara el resultat amb el de l'exercici anterior. Quantes vegades és inferior aquest respecte d'aquell?

31. ●●● C8 Actualment, al món hi ha aproximadament 240 països. Si es repartissin els 35 bilions d'euros entregant la mateixa quantitat a cada país, quant correspondria a cada nació?

Creus que aquest repartiment és just? Per què? Es podria assignar a cada país una quantitat que fos directament proporcional al nombre d'habitants. Segons aquest criteri, quants diners correspondrien a Espanya, considerant 50 milions d'habitants?

Proporcionalitat directa

32. ●●● Indica si les següents magnituds són directament proporcionals o no. En cas afirmatiu, indica quina és la constant de proporcionalitat directa.

a)

X	6	4	8	2	10
Y	9	6	12	3	15

b)

X	10	16	7	20	25
Y	5	8	3	10	13

33. ●●● Completa amb els nombres necessaris perquè les magnituds siguin directament proporcionals.

a)

X	9	15		27	
Y		20	24		52

- b) Constant de proporcionalitat directa = $\frac{5}{2}$

X	8			10	21
Y		30	37,5		

34. ●●● Una font raja 408 litres d'aigua en 16 minuts. Quants litres d'aigua rajarà en mitja hora?

35. ●●● Un empresari va invertir 5 000 euros en el seu negoci i va obtenir un benefici de 6 000 €. Quant hauria obtingut de benefici si la inversió realitzada hagués estat de 4 500 €?

36. ●●● Per fer 150 metres de carretera es gasten 30 000 euros. Quant costaran 70 metres de la mateixa carretera?

37. ●●● En un plànol, una distància de 5 cm representa una distància real de 7 500 metres. Quina distància representaran 9 cm?

38. ●●● La Dèbora està elaborant un plànol de la seva habitació, i vol que la longitud gran, que correspon a una paret de 6 metres, ocupi al paper 15 cm. Quant ha de mesurar la línia que representa una altra paret la mida de la qual és de 3,5 metres?

39. ●●● Per fer una truita, l'Olvido, en Carles i l'Antoni aporten 2, 4 i 5 ous, respectivament. La truita pesa 341 grams. Quants grams de truita corresponen a cada un?

40. ●●● Tres paletes que tenen la mateixa categoria han cobrat per fer una obra 2 040 €. Un paleta va treballar 15 dies, un altre, 12 i un tercer, 7. Quina quantitat correspon a cada un?

41. ●●● Cinc amics participen en una prova en què han de trobar objectes amagats. Aconsegueixen respectivament 8, 12, 13, 7 i 10 objectes. El premi consisteix en 150 punts repartits de forma proporcional als objectes que trobin. Quants punts corresponen a cada jugador?

Proporcionalitat inversa

42. ●●● C5 Indica quins de les següents magnituds són directament proporcionals, quines són inversament proporcionals i quines no tenen cap relació de proporcionalitat.

- a) El pes de les pomes que comprem i el preu que ens en fan pagar.
- b) L'alçada d'una persona i la seva talla de sabates.
- c) La velocitat de la meva connexió a Internet i el temps que triga a carregar-se una pàgina.
- d) L'àrea d'una paret i la quantitat de pintura necessària per pintar-la.
- e) La velocitat del vent en un huracà i les pèrdues que provoca en euros.
- f) La distància recorreguda per un vehicle i la quantitat de combustible gastat.

43. ●●● Indica si les següents magnituds són inversament proporcionals o no. En cas afirmatiu, indica quina és la constant de proporcionalitat inversa.

a)

X	4	3	8	12	1
Y	12	16	6	3	48

b)

X	12	10	2	120	20
Y	5	6	30	0,5	3

44. ●●● Completa amb els nombres necessaris perquè les magnituds siguin inversament proporcionals.

a)

X	6	18		12	36
Y			4,5	9	

b) Constant de proporcionalitat inversa = 18

X		2	3	4	
Y	18				3,6

45. ●●● Cinc aixetes triguen a omplir un dipòsit 20 minuts. Quant trigarà a omplir-se el dipòsit si tanquem una de les aixetes?

46. ●●● 18 persones triguen 30 minuts a fer una tasca determinada. Quantes persones serien necessàries per fer-la en només 27 minuts?

47. ●●● Si un ciclomotor fa un viatge de tres hores i mitja a 50 km/h, quant trigarà a fer el mateix viatge a 35 km/h?

48. ●●● Dos corredors triguen 4 i 6 minuts a acabar una carrera. Es reparteixen 480 € entre ells de forma inversament proporcional al temps que han trigat. Quant correspon a cada un?

49. ●●● Els dos cambrers d'un bar es reparteixen al final de mes 136 euros de propina de forma inversament proporcional al nombre de dies que han faltat. Si un ha faltat 3 dies i l'altre 5, quants euros corresponen a cada un?

Proporcionalitat composta

50. ●●● En una fàbrica de conserves. Es produeixen 7 500 llaunes al mes si treballen 15 operaris en jornades de 8 hores diàries. Calcula quantes llaunes de conserves es produirien si 3 dels treballadors estan de baixa i per compensar-ho les jornades s'amplien a 10 hores diàries. L'augment de jornada aconsegueix compensar l'absència dels tres treballadors?

51. ●●● C7 En una sala de concerts han observat que la recaptació neta és proporcional al nombre de persones que assisteixen a l'espectacle i a l'import de cada entrada. La setmana passada hi van anar 640 persones, l'entrada valia 12 euros i la recaptació va ser de 7 040 euros. Avui hi ha concert, i han comprat entrada 608 persones per 9 euros. Quina serà la recaptació?

52. ●●● En un dipòsit la base del qual és un rectangle de costats 4×2 metres, hi ha aigua fins a una altura d'1,8 metres. Si transvasem aquesta aigua a un dipòsit de base quadrada de 3 metres de costat, a quina altura arribarà?

EXERCICIS I PROBLEMES

53. ●●● Si 5 màquines teixeixen en 6 hores 60 jerseis, quantes màquines es necessitaran per fer 100 jerseis en 5 hores?

54. ●●● Una residència de 150 estudiants disposa de provisions per a 30 dies. Per a quants dies tindran provisions si hi hagués 160 estudiants i la ració es reduís als $\frac{3}{4}$ de la quantitat que es donava abans?

55. ●●● Para construir els primers 4 quilòmetres d'una carretera, han treballat 15 operaris durant 8 dies en jornades de 8 hores. Durant quants dies han de treballar 10 operaris en jornades de 6 hores per construir 5 quilòmetres de carretera?

Percentatges

56. ●●● Completa la taula.

Percentatge	Fracció	Decimal
20%		
	$\frac{3}{50}$	
		0,15
75%		
	$\frac{6}{5}$	
		0,005

57. ●●● C12 Calcula utilitzant la calculadora:

- a) 28% de 360 c) 60% de 6,5
b) 45% de 1 500 d) 95% de 12 800

58. ●●● Troba el percentatge que representa:

- a) 20 de 25 c) 2 100 de 2 800
b) 10 de 32 d) 510 de 600

59. ●●● Completa.

- a) 48% de 520 = □ d) 16% de 80 = □
b) □% de 200 = 75 e) □% de 230 = 92
c) 75% de □ = 87 f) 24% de □ = 162

60. ●●● C5 L'amo d'una empresa explica als seus empleats que aquest mes no els pot pagar els salaris complets i que, per tant, es reduiran un 10%, però que no s'han de preocupar, perquè aquesta baixada només es produirà aquest mes, i el següent se'ls aplicarà una pujada de sou del 10%, de manera que es compensarà la baixada anterior i, per tant, es tornarà a tenir la mateixa remuneració que abans.

No obstant això, un empleat s'adona que l'empresari no els diu la veritat, i que els seus sous no tornaran a ser els mateixos del principi. Com es veuran afectats els seus salaris per aquesta baixada i pujada de sou?

61. ●●● C9 Copia i completa la següent taula que mostra la quantitat de botons que produeix una fàbrica per colors el 2014.:

Color	Botons	Percentatge
Vermell		17,80 %
Fúcsia	7 512 381	
Aiguamarina		13,74 %
Verd	5 111 706	
Ametista		5,95 %
Blau marí	2 559 515	
Beix		4,63 %
Rosa	2 118 519	
Turquesa		4,46 %
Canyella	1 461 979	
Gris		2,86 %
Carmesí	1 107 220	
Castany rogenc		2,35 %
Corall	1 084 341	
Blanc		1,35 %
Malva	592 250	
Crema		0,69 %
Negre	80 579	
Groc		0,16 %
TOTAL	47 021 031	100 %

62. ●●● C12 Realitza els següents descomptes i augments percentuals utilitzant la calculadora:

- a) Descompte del 12 % de 1 500.
- b) Augment del 20 % de 550.
- c) Descompte del 42 % de 960.
- d) Augment del 68 % de 2 450.

63. ●●● Troba la quantitat inicial demanada en cada increment o disminució percentual següent:

- a) Si descomtem el 7 % de $\square$ resulta 1 860.
- b) Si incrementem el 15 % de $\square$ resulta 400.

64. ●●● Troba el percentatge d'augment o descompte en cada cas.

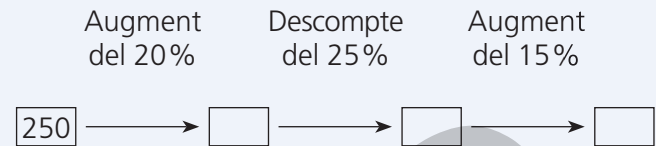
- a) Un producte que valia 140 euros, ara en val 133.
- b) Un producte que valia 25 euros, ara en val 26.

65. ●●● C2 Completa la factura següent:

MULTI banys	
1 mirall 100×60	90 €
2 aixetes monocomandament.....	83 €
1 moble del lavabo.....	125 €
Subtotal	$\square$ €
IVA 21 %.....	$\square$ €
Total.....	$\square$ €

66. ●●● C7 Fa un any vaig comprar un ordinador per 750 € amb un disc dur de 500 Gb. En aquest temps, aquest mateix model d'ordinador s'ha abaratit un 5 % i la capacitat del disc dur ha augmentat un 20 %. Quant costa ara aquest model i quina capacitat té el disc dur?

67. ●●● C12 Realitza els següents augments i descomptes utilitzant la calculadora.



68. ●●● El preu de la gasolina va pujar un 2 % al gener, va baixar un 1 % al febrer, va pujar un 10 % al març, va baixar un 3 % a l'abril i va tornar a baixar un 4 % al maig.

Si el preu per litre a principis d'any era d'1,4226 euros, quant val un litre de gasolina quan s'acaba el maig?

69. ●●● C2, C5 Si a una quantitat determinada hi apliquem una pujada del 15 % i una baixada del 10 %, aquesta quantitat augmenta o disminueix? Quin percentatge augmenta o disminueix?

Nota: el percentatge global no és del 5 %.

70. ●●● C2, C5 Comprarem un producte que, sense impostos, val 50 euros. El producte té una rebaixa del 12 % i cal aplicar-hi l'IVA del 21 %. Què ens convé més, que primer facin el descompte i després hi afegixin l'IVA o que primer hi sumin l'IVA i després apliquin la rebaixa?

71. ●●● Allarguem un 20 % un quadrat de costat 10 cm, i l'altre costat el disminuïm un 20 %. L'àrea ha disminuït o ha augmentat? En quin percentatge? El resultat obtingut depèn de la longitud inicial del costat?

72. ●●● C2 Invertim 10 000 euros en un banc al 2 % d'interès simple durant 5 anys. Quin benefici obtindrem? Quants diners tindrem al final d'aquest període?

73. ●●● C2 Quants diners s'obtenen al cap de 9 mesos si invertim un capital de 6 000 euros al 5 % d'interès simple? I si l'hi tinguéssim 7 dies més?

EXERCICIS I PROBLEMES

74. ●●● C2 Completa la taula següent d'interès simple:

Interès (€)	Capital (€)	Rèdit (%)	Temps (anys)
	2 500	5	5
540		3	3
3 360	12 000		7
2 000	20 000	2,5	

75. ●●● C2 Calcula durant quants anys cal mantenir una inversió de 1 500 euros al 3 % d'interès simple per aconseguir tenir 1 725 euros.
76. ●●● C2 Troba a quin rèdit d'interès simple s'ha invertit un capital de 4 000 € si el benefici obtingut al cap de 30 mesos ha estat de 200 €.
77. ●●● C2 Al cap de 72 dies de realitzar una inversió al 6 % d'interès simple, tenim un capital final de 2 783 euros. Quants diners havíem invertit?
78. ●●● C2 Troba durant quants anys cal mantenir una inversió al 5 % d'interès simple perquè el capital es dupliqui.

Problemes de mescles, mòbils i aixetes

79. ●●● C1 Per obtenir un biocombustible determinat, es barregen 200 litres de gasolina amb 50 litres de bioetanol. El preu de la gasolina és d'1,30 €/L, mentre que el del bioetanol és de 0,50 €/L. Quin serà el preu del biocombustible obtingut?
80. ●●● Quants quilograms de ciment de 0,95 €/kg s'han barrejat amb 150 kg de sorra a 0,25 €/kg per obtenir una mescla que costi 0,425 €/kg?
81. ●●● C1, C8 El bronze és un aliatge de coure i estany, molt habitual en aparells mecànics i en escultures artístiques. Per exemple, aquest era el material que feia servir Auguste Rodin en escultures com *El pensador* o *Les portes de l'infern*.
Per realitzar una escultura, es barregen 500 kg de coure a 3,50 €/kg amb 50 kg d'estany a 5 €/kg. Quin és el preu del bronze resultant?

82. ●●● C1 També es pot considerar com a bronze altres aliatges de coure amb alguns materials a més de l'estany. En aquest cas, la llei del bronze serà el percentatge de coure pur que el forma.

Volem realitzar un aliatge de 100 kg de bronze de llei 85 % amb 60 kg de bronze de llei 90 %. Quina serà la llei de l'aliatge resultant?

83. ●●● C1 Realitzem un aliatge d'or de 18 quirats amb or de 22 quirats, fent servir 500 grams del primer i 300 grams del segon. De quants quirats serà l'aliatge?
84. ●●● Indiana Jones corre a 5 m/s davant d'una enorme roca que va a 12 m/s i que amenaça d'aixafar-lo. Si ara els separa una distància de 42 metres, quant temps té Indiana Jones per arribar a la sortida abans que la roca l'encalci?
85. ●●● La Sandra surt en cotxe de Còrdova cap a Palència, i l'Hèctor de Palència a Còrdova per la mateixa carretera i al mateix temps. La Sandra va a 120 km/h i l'Hèctor va a 100 km/h. Quant temps trigaran a reunir-se i quina distància haurà recorregut cada un si sabem que entre les dues ciutats hi ha 640 km?

86. ●●● Una aixeta omple un dipòsit en 45 minuts, mentre que una altra ho fa en 30 minuts. Si obrim les dues aixetes alhora, quant trigaran a omplir el dipòsit?
87. ●●● Una bóta disposa d'una aixeta i d'un petit desguàs amb un tap al fons. Si s'obris l'aixeta, trigaria 2 hores a buidar-se, mentre que si es tragués el tap, trigaria 3 hores i 20 minuts. Quant trigaria a buidar-se la bóta si s'obris l'aixeta i el desguàs alhora?
88. ●●● C1 Per omplir una piscina olímpica amb una aixeta domèstica, necessitariem tenir-lo obert 70 dies ininterrompudament. Si l'omplíssim amb una mànega d'alta pressió, trigariem 36 hores. Quant temps es trigaria a omplir-la si utilitzéssim una mànega d'alta pressió i 20 aixetes convencionals?

SABER-NE MÉS

89. ●●○ C2 Troba el capital final obtingut en una inversió de 12 000 € al 4 % d'interès compost durant 5 anys, i compara'l amb el que s'obtingria si l'interès fos simple.
90. ●●○ C2 Calcula quants diners obtindríem de benefici si invertim 10 000 € al 3 % d'interès compost durant 1 any, si els pagaments d'interessos són:
- a) Anuals.
 - b) Mensuals.
 - c) Diaris.
91. ●●○ C2 Quina quantitat cal invertir al 5 % d'interès compost per obtenir 1 736,44 € al cap de 3 anys?
92. ●●● C2 Troba el capital que hem invertit al 4 % d'interès compost mensual si el benefici obtingut al cap de mig any és de 1 008,37 €.
93. ●●● C2 Hem invertit 24 000 € durant 2 anys i hem obtingut 2 460 € de beneficis. A quin tant per cent d'interès compost ho hem invertit?

*El pensador**Les portes de l'infern*

1. Caminar

En Bernat sap que els seus passos són de 0,80 metres. El caminar d'en bernat s'ajusta a la fórmula $\frac{n}{P} = 140$, en què n és el nombre de passos per minut i P és la longitud del pas en metres.

Calcula la velocitat a la qual camina en Bernat en metres per minut i en quilòmetres per hora. Mostra els teus càlculs.



2. Els nivells de CO₂

Molts científics temen que l'augment del nivell de gas CO₂ a la nostra atmosfera estigui causant un canvi climàtic.

El diagrama següent mostra els nivells d'emissió de CO₂ el 1990 (les barres fosques) de diversos països (o regions), els nivells d'emissió el 1998 (les barres clares), i el percentatge de canvi en els nivells d'emissió entre el 1990 i el 1998 (les fletxes amb percentatges).

a) Al diagrama es pot llegir que l'augment d'emissions de CO₂ als Estats Units entre el 1990 i el 1998 va ser de l'11%.

Escriu els càlculs per demostrar com s'obté aquest 11%.

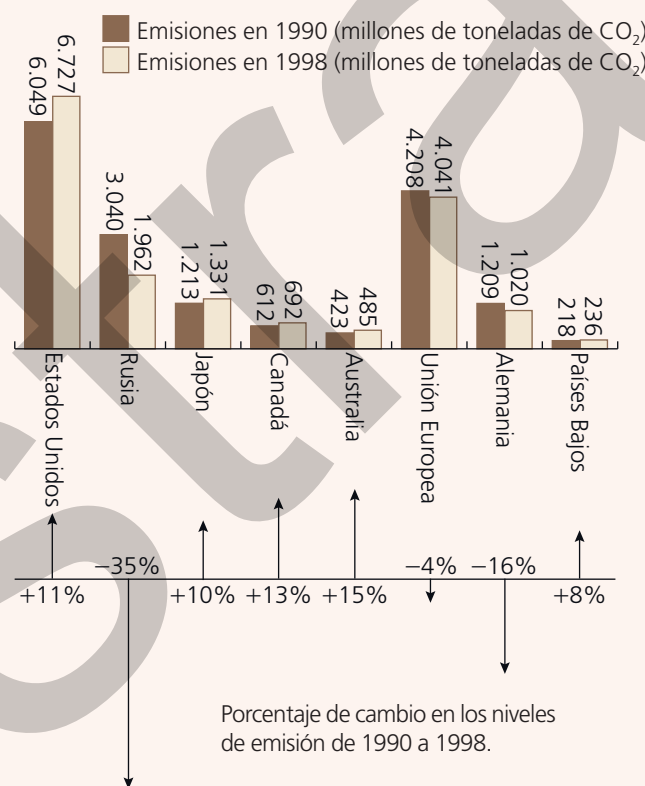
b) La Lluïsa va analitzar el diagrama i va afirmar que havia descobert un error en el percentatge de canvi dels nivells d'emissió: «El descens del percentatge d'emissió a Alemanya (16%) és més gran que el descens del percentatge de l'emissió a tota la Unió Europea (total de la UE, 4%). Això no és possible, ja que Alemanya forma part de la Unió Europea».

Estàs d'acord amb la Lluïsa quan diu que això no és possible? Dóna una explicació que justifiqui la teva resposta.

c) La Lluïsa i l'Antoni discuteixen sobre quin país (o regió) va tenir l'augment més gran en emissions de CO₂.

Cada un arriba a conclusions diferents basant-se en el diagrama.

Dóna dues possibles respostes «correctes» a aquesta pregunta i explica com es pot obtenir cada una d'aquestes respostes.



Raonament i prova C5
Comunicació i representació C9

3. Un club de computació tenia 40 membres i el 60 % eren nenes. Després, 10 nens es van unir al club. Quin percentatge dels membres ara són nenes?

Resolució de problemes C1

4. Rebaixes

En Ferran i en Miquel han decidit comprar-se les mateixes botes i veuen que en dues sabateries diferents estan al mateix preu, si bé en una els apliquen un 25 % de descompte i a l'altra ofereixen el segon parell de botes a meitat de preu. Si decideixen comprar les botes a la mateixa botiga, on els sortirà més barat?

- A. Depèn de quant valguin les botes.
- B. Les botes costen el mateix a les dues botigues.
- C. A la botiga on fan un 25 % de descompte.
- D. A la botiga on el segon parell els surt a meitat de preu.

Raonament i prova C5

AVALUA'T

PROPORCIONALITAT

1. En un plànol d'una casa, 3 cm representen 2 m de la realitat. Quant representaran en aquest plànol 90 cm de la realitat?
2. En una casa hi ha menjar per a 4 persones durant 15 dies. Si ve 1 persona més, per a quants dies hi haurà menjar?
3. Reparteix 105 en parts directament proporcionals a 6, 7 i 8.
4. Reparteix 295 en parts inversament proporcionals a 2, 5 i 7.
5. Cinc forns triguen 6 hores a fer 600 pans de llenya. Si encenem 7 forns per poder fer 1400 pans, quant temps necessitem?
6. Un televisor de plasma valia 600 €, però aquest any li han apujat un 2% el preu. Quant val ara?
7. Un DVD val 15 €. Com que està d'oferta em descompten un 5%, però després m'hi afegeixen el 21% d'IVA. Quant val ara el DVD?
8. Calcula l'interès que produeixen 1800 € en 6 mesos al 2% anual.
9. Es barregen 3 L de vi a 1,50 €/L amb 2 L de gasosa a 0,90 €/L. Quant val el litre de mescla?
10. En Manel fa una paret de maons en 4 hores i en Francesc fa la mateixa paret en 5 hores. Si treballen tots dos junts, quant trigaran?

MATEMÀTIQUES RECREATIVES

1. Troba el nombre x més petit tal que si repartim x en parts directament proporcionals a 2, 3 i 4 s'obtenen nombres enters, i si el repartiment fos inversament proporcional, també serien nombre enters.
2. En una granja, no sabem quants animals hi ha, però sabem que estan en la següent proporció: el 20% són gallines, el 30% són porcs i el 50% són ovelles.
3. Tres amics queden per menjar junts. Quan van a pagar el compte, el cambrer els indica que puja a 25 euros. Cada un d'ells hi posa 10 euros, i el cambrer els torna 5 euros de canvi. Com que aquests 5 euros no es poden repartir de forma exacta entre els tres amics, decideixen deixar 2 euros de propina al cambrer i repartir 1 euro per a cada comensal.

Es compren tantes gallines com les que ja hi havia, i ara, per tant, són el doble que abans. Quina és la proporció actual de gallines, porcs i ovelles?



Un cop acabat tot aquest procés, es paren un moment a pensar:

Si cada un hem pagat 10 euros i hem rebut un canvi d'1, ens hem gastat 9 euros, que per tres persones fa un total de 27 euros. Si hi sumem els 2 euros de propina, resulten 29 euros. On és l'euro que falta fins a 30?

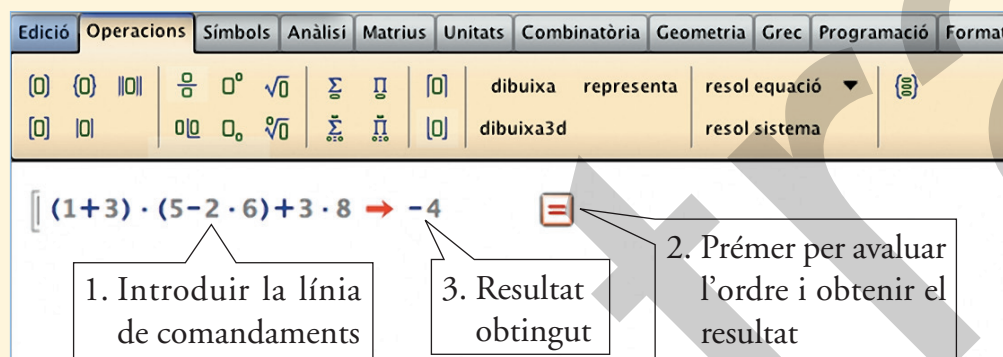
Ho podries esbrinar, tu?

Bloc I: Aritmètica

Funcionament del Wiris

El Wiris és un programa senzill que ens permet realitzar càlculs de dificultat variable i d'àmbits diversos de la matèria.

El seu funcionament és molt simple: n'hi ha prou d'introduir el comandament que volem i pulsar  per avaluar l'ordre i obtenir el resultat. Els comandaments apareixeran de color negre.



Operacions

Operacions aritmètiques bàsiques: suma (+), resta (-), multiplicació ($\cdot$), divisió (/).

Nombres decimals: la coma decimal s'escriu amb un punt (.) i no amb coma.

Nombres fraccionaris: a la pestanya *Operacions*, es pot escollir el símbol  i introduir el numerador i el denominador d'una fracció. En el cas de necessitar parèntesis grans que continguin tota la fracció es faran servir els que apareixen a *Operacions* .

Potències i arrels: al menú *Operacions* existeix el símbol , que permet introduir la base i l'exponent d'una potència, i els símbols  i  que ens faciliten el càlcul d'arrels quadrades o de qualsevol altre índex.

Valor absolut: a la pestanya *Operacions* trobem , que ens calcula el valor absolut d'una expressió i que podem fer servir per estimar valors absoluts.

EXERCICIS RESOLTS

1. Resol les següents operacions amb nombres enters, decimals i fraccionaris:

a) $-3 + 2 \cdot (5 - 7 + 8 : 4)$

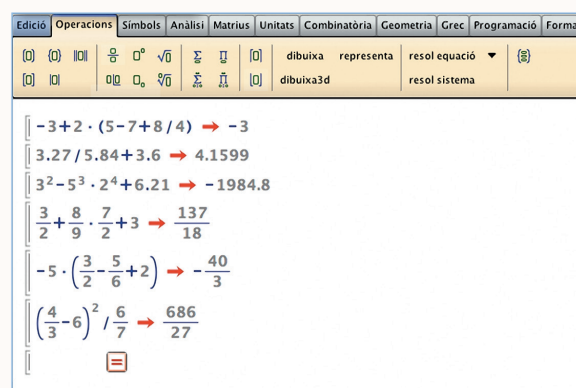
d) $\frac{3}{2} + \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{2} + 3$

b) $3,27 : 5,84 + 3,6$

e) $-5 \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{6} + 2 \right)$

c) $3^2 - 5^3 \cdot 2^4 + 6,21$

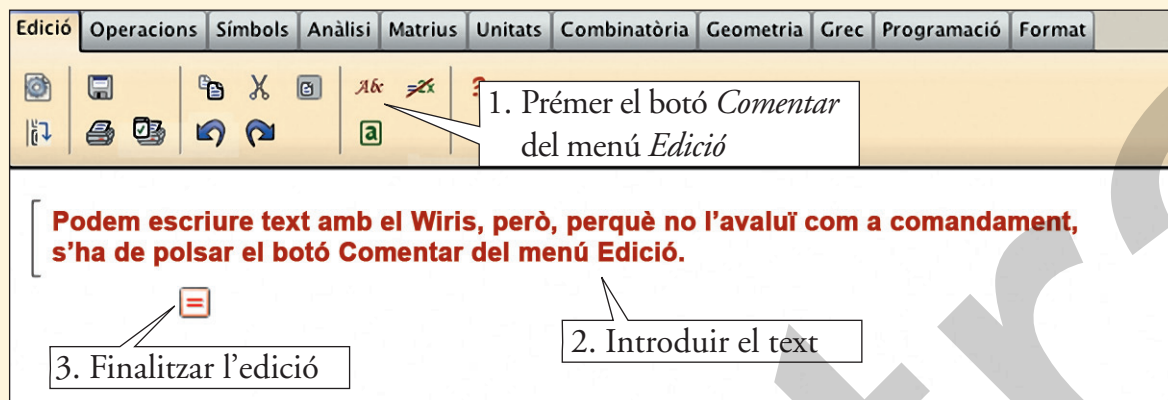
f) $\left(\frac{4}{3} - 6 \right)^2 : \frac{6}{7}$



Solució

Introducció de text

Per editar text no avaluable i no comandaments (apareixerà en vermell) s'ha d'escollir el menú *Edició* i polsar el botó . Per indicar que deixarem d'editar text, polsarem .



Comandaments

factoritzar(*nombre*): calcula la descomposició factorial en nombres primers del nombre donat.

divisors(*nombre*): calcula els divisors del nombre donat.

mcd(*nombre1*, *nombre2*...): calcula el màxim comú divisor dels nombres indicats.

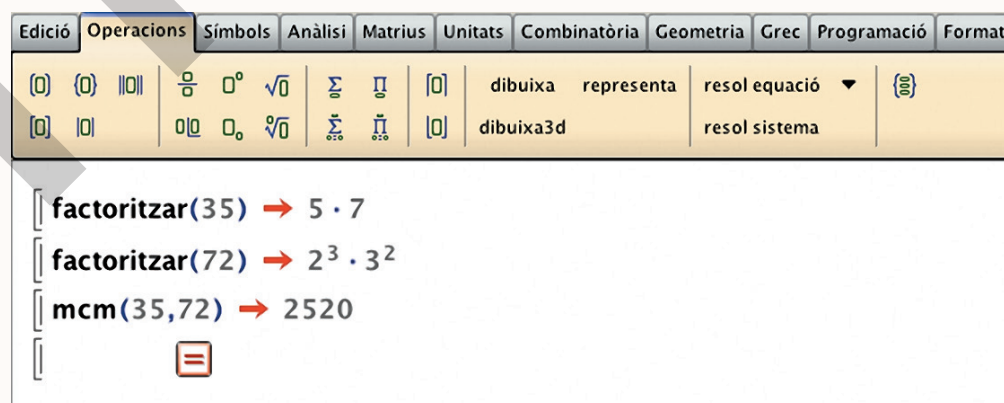
mcm(*nombre1*, *nombre2*...): calcula el mínim comú múltiple dels nombres indicats.

racional(*nombre decimal exacte*): calcula la fracció irreductible corresponent a un decimal exacte.

precisió(*nombre*): fixa el nombre de xifres significatives (per defecte 5).

EXERCICIS RESOLTS

2. Troba la descomposició en factors primers de 35 i 72 i calcula'n el mínim comú múltiple.



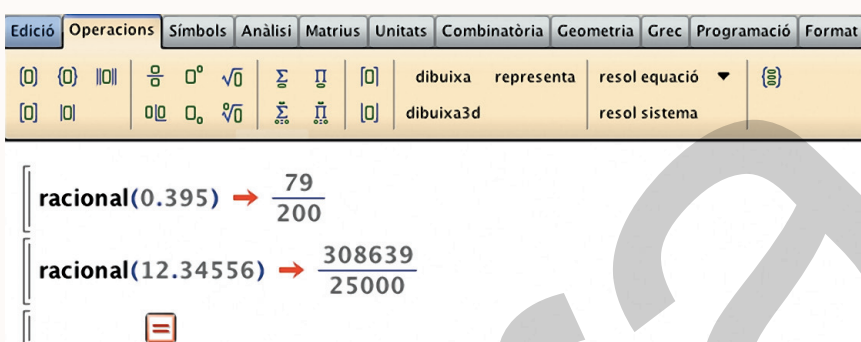
Solució

EXERCICIS RESOLTS

3. Obtén la fracció generatriu dels següents nombres decimals:

a) 0,395

b) 12,34556



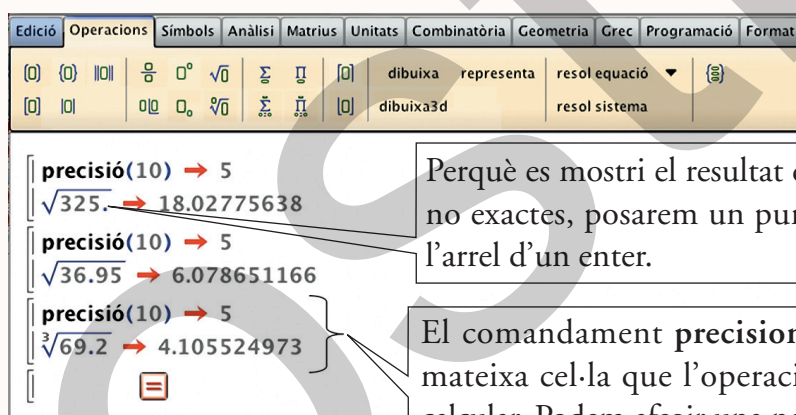
Solució

4. Calcula les següents arrels amb 10 xifres significatives:

a) $\sqrt{325}$

b) $\sqrt{36,95}$

c) $\sqrt[3]{69,2}$

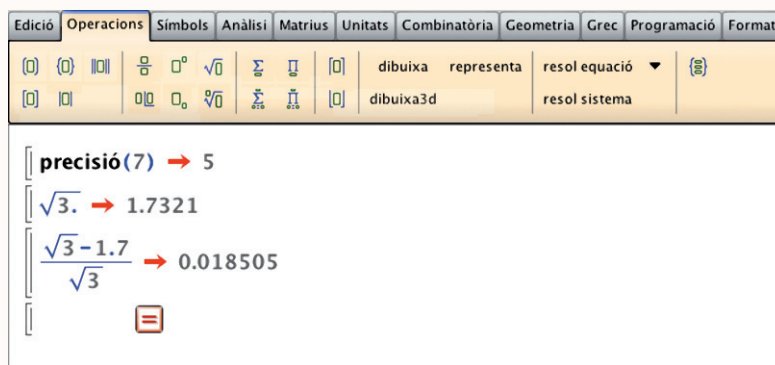


Perquè es mostri el resultat decimal d'arrels no exactes, posarem un punt decimal si és l'arrel d'un enter.

El comandament **precision** ha d'anar a la mateixa cel·la que l'operació que vulguem calcular. Podem afegir una nova línia a la mateixa cel·la, prement la tecla de retorn.

Solució

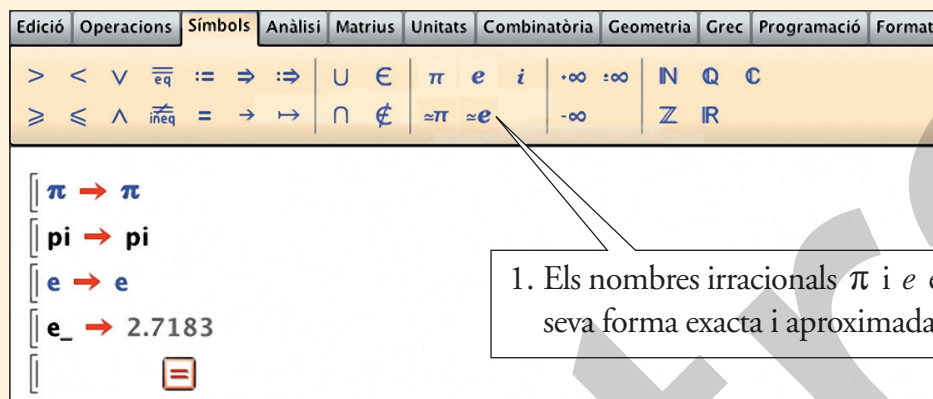
5. Calcula l'error relatiu comès en estimar $\sqrt{3}$ amb 1 decimal. Treballa amb 6 decimals com a valor real de $\sqrt{3}$.



Solució

Símbols

A la pestanya de símbols trobem dos dels nombres irracionals més utilitzats, π i e , tots dos amb valor exacte, utilitzats de forma simbòlica, i també de forma aproximada, fent servir el seu valor decimal arrodonint al nombre de xifres decimals que vulguem (5 xifres significatives per defecte).



EXERCICIS

1. Realitza les següents operacions:

a) $5 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{4} \cdot 2 + 6\right)^3 \cdot \frac{2}{5}$

b) $(18 - (-4 + 2 : 2) \cdot 5 + 8)^5 \cdot 7 - 560$

c) $2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^3 : \left(\frac{-4}{9} : 2\right)^2 - \frac{6}{7} + \frac{1}{5}$

2. De quina fracció provenen els següents nombres decimals?

a) 32,25 b) 0,0035 c) 69,5

3. Passa a decimal les següents fraccions amb 5 xifres decimals i classifica el decimal obtingut:

a) $\frac{25}{3}$ b) $\frac{69}{9}$ c) $\frac{102}{6}$ d) $\frac{5\,245}{52}$

4. Resol les arrels següents amb 5 xifres significatives en el resultat:

a) $\sqrt{6\,787}$ c) $\sqrt[3]{357\,142}$

b) $\sqrt{27,26}$ d) $\sqrt[4]{154\,798}$

5. Realitza les següents operacions amb arrels:

a) $(\sqrt{3} \cdot \sqrt{20})^3$ c) $\sqrt{16^3}$

b) $\sqrt{400} : \sqrt{5}$ d) $(\sqrt{3})^7$

6. Extreu factors fora de l'arrel.

a) $\sqrt{1\,250}$ b) $\sqrt{800}$ c) $\sqrt{128}$ d) $\sqrt{98}$

7. Obtén el nombre que correspon a les següents expressions en notació científica:

a) $3,2 \cdot 10^3$ c) $3,68 \cdot 10^6$

b) $2,81 \cdot 10^{-2}$ d) $1,987 \cdot 10^{-8}$

8. Realitza les següents operacions amb notació científica:

a) $1,56 \cdot 10^{40} + 3,56 \cdot 10^{38}$

b) $(3,5 \cdot 10^{12}) \cdot (6,5 \cdot 10^{-5})$

c) $(4,37 \cdot 10^{15}) : (3,1 \cdot 10^{10})$

d) $9,87 \cdot 10^5 - 6,87 \cdot 10^5$

9. a) Troba amb 15 dígits de precisió el nombre π i el nombre e .

b) Obtén la fracció generatriu d'aquestes aproximacions.

10. Opera de forma aproximada amb arrels.

a) $\sqrt{27} - \sqrt{12}$

b) $3\sqrt{35} - 5\sqrt{28} + 2\sqrt{40}$

11. Calcula l'error relatiu en aproximar $\frac{1}{3}$ i $\sqrt{5}$ amb dues xifres decimals.